

Категорія М перший курс

1. Нехай $\lfloor x \rfloor$ та $\lceil x \rceil$ означають найбільше ціле число з проміжку $(-\infty, x]$ та найменше ціле число з проміжку $[x, \infty)$ відповідно. Для $n \in \mathbb{N}$ позначимо

$$P_n = \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \quad \text{та} \quad Q_n = \sum_{i=1}^n \left\lceil \frac{n}{i} \right\rceil.$$

Знайти $Q_{2022} - P_{2022}$.

2. Позначимо

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{та} \quad g(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}, \quad x \geq 1.$$

Знайти

$$\underbrace{f(f(\dots f}_{2022 \text{ рази}}(g(\underbrace{g(g(\dots g}_{2022 \text{ рази}}(x) \dots))) \dots))}.$$

3. Числову послідовність $(x_n, n \in \mathbb{N})$ задано початковими умовами $x_1 = x_2 = 1$ та рекурентним рівнянням

$$x_n = \frac{x_{n-1}x_{n-2}}{2022\sqrt{x_{n-1}^{2022} + x_{n-2}^{2022}}}, \quad n \geq 3.$$

Довести існування границі $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n-1}}$ та знайти її.

4. Для прямокутного трикутника з катетами a та b позначимо через \mathcal{M} множину тих точок всередині трикутника, які знаходяться ближче до гіпотенузи, ніж до кожного з катетів. Знайти площу \mathcal{M} .
5. Нехай $U = \{1, \dots, n\}$, Δ означає симетричну різницю множин, а card — кількість елементів множини. Знайти

$$\sum_{A, B \subset U} \text{card}(A \Delta B).$$

Тут додавання проводиться за всіма можливими впорядкованими парами (A, B) підмножин U .

6. Чи існує така нескінченна послідовність (x_1, x_2, \dots) з нулів та одиниць, що

$$\begin{cases} x_i = 0 \implies x_{i+2021} = 1, \\ x_i = 1 \implies x_{i+2022} = 0 \end{cases}$$

для кожного $i \geq 1$?